Wiederholung

- flacher Torus: $T^n_\Gamma := \mathbb{R}^n / \Gamma \quad , \quad \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ Gitter

$$\Gamma = \{ a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \mid a_i \in \mathbb{Z} \}$$ $v_i \in \mathbb{R}^n$ linear unab

$$\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow T^n_\Gamma \qquad x \longmapsto [x]$$ Riemannsche Überlagerung

$\rightsquigarrow$ Riemannsche Metrik g_Γ auf T^n_Γ mit $R \equiv 0$

- (T^n_Γ, g_Γ), $(T^n_{\Gamma'}, g_{\Gamma'})$ isometrisch
$\Leftrightarrow \exists$ Isometrie von $\mathbb{R}^n$, die die Gitter überführt

- duales Gitter: $\Gamma^* = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall y \in \Gamma \}$

- Δ - Eigenfunktionen auf T^n_Γ:

$\forall x \in \Gamma^*$: $f_x \in C^\infty_{\mathbb{C}}(T^n_\Gamma)$ linear unabhängig

$$f_x([y]) = e^{2\pi i \langle x, y \rangle}$$

Eigenwerte: $$\Delta^{T^n_\Gamma} f_x = 4\pi^2 \|x\|^2 f_x$$

Eigenräume: $$E_\lambda = \operatorname{span} \{ f_x \mid x \in \Gamma^*, \|x\|^2 = \frac{\lambda}{4\pi^2} \}$$

Dimension ist gerade da $\pm x$

- 2-dimensionale flache Tori entsprechen bis auf Isometrie Punkten in

$$\mathcal{M} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq a^2, \ 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2} a, \ y > 0 \}$$

Das Spektrum 1- und 2-dimensionaler flacher Tori

Ziel: In kleinen Dimensionen bestimmt das Spektrum den flachen Torus bis auf Isometrie

Satz: Seien (M,g), (M',g') zwei zus. kompakte 1-dimensionale Mfk. mit $\mathrm{Spec}(M,g) = \mathrm{Spec}(M,g')$. Dann sind (M,g) und (M',g') zueinander isometrisch.

Beweis: Klassifikation 1-dim Mfk. $\rightsquigarrow$ M, M' diffeomorph zu S^1

zwei Kreise sind genau dann isometrisch, wenn sie die gleiche Länge haben

Kreis der Länge L: $\mathbb{R}/_{L\mathbb{Z}}$ $\qquad \Gamma = L\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \Gamma^* = \frac{1}{L}\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{R}/_{L\mathbb{Z}}) = \{ 4\pi^2 \cdot \frac{k^2}{L^2} \mid k = 0, 1, \dots \}$

$\Rightarrow$ Der kleinste Eigenwert ungleich Null bestimmt die Länge.

Satz. Seien Γ, Γ' zwei Gitter in $\mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{Spec}(T^2_\Gamma, g_\Gamma) = \mathrm{Spec}(T^2_{\Gamma'}, g_{\Gamma'})$. Dann sind (T_Γ, g_Γ) und $(T_{\Gamma'}, g_{\Gamma'})$ isometrisch.

$a, b \in \mathbb{R}^2$

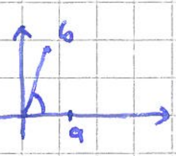
Beweis: • $\Gamma \cong \Gamma' \Leftrightarrow \Gamma^* \cong (\Gamma')^*$ $\qquad \Gamma^* = a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$

• zu zeigen: $\mathrm{Spec}(T^2_\Gamma, g_\Gamma)$ bestimmt (T^2_Γ, g_Γ) bis auf Isometrie

dh. bestimmt Γ bis auf Isometrien (von $\mathbb{R}^n$)
dh. bestimmt die Vektoren a, b

• a: Vektor in Γ^* mit $a \neq 0$ und $\|a\|$ minimal

$\rightarrow \|a\| = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{2\pi}$ dh. a ist bestimmt



• zu bestimmen ist b dh. $\|b\|$ und $\langle a, b\rangle$

$\|b\|$ ist bestimmt durch $\min\{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Spec}(T^2_\Gamma, g_\Gamma) \setminus \{k^2\lambda_1 \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$
Eigenwerte gezählt mit Vielfachheit

da: Welcher Eigenwert gehört zu $k \cdot a$? $\qquad \|k \cdot a\| = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \Rightarrow k^2\|a\|^2 = \frac{\lambda}{(2\pi)^2}$

$k \in \mathbb{Z} \rightarrow$ jeder EW zweimal entfernt entsprechend $+ka, -ka$ $\qquad \rightarrow \lambda = (2\pi)^2 k^2 \cdot \|a\|^2 = k^2 \cdot \lambda_1$

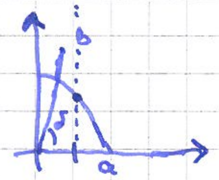
Eigenwerte werden mit Vielfachheit gezählt
$\rightsquigarrow$ für $k \neq 0$ entfernt man jeden EW zweimal, entsprechend ka und $-ka$

($\|b\|$ kann ein Vielfaches von $\|a\|$ sein)

$\boxed{\text{kleinster verbleibender EW: } 4\pi^2\|b\|^2}$

$$\langle a,b\rangle = \frac{1}{2}\left(\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|b-a\|^2\right)$$

zu bestimmen bleibt: $\|b-a\|$



- nach Konstruktion $\langle a,b\rangle \geq 0$
- $\langle a,b\rangle \leq \frac{1}{2}\|a\|^2$

da: $\langle a,b\rangle = \|a\|\cdot\|b\|\cos\delta$
$\leq \|a\|\cdot\frac{1}{2}\|a\| = \frac{1}{2}\|a\|^2$

da $\|b\|\cos\delta$ ist die orthogonale Projektion von b auf die x-Achse, $a \in \mathbb{R}_+$

$\rightarrow \|b\|^2 \leq \|b-a\|^2 \leq \|a\|^2 + \|b\|^2$

- $a,b \in \Gamma^* \Rightarrow b-a \in \Gamma^*$, $4\pi^2\|b-a\|^2 \in \operatorname{Spec}(T_\Gamma, g_\Gamma)$

$\rightarrow 4\pi^2\|b-a\|^2 \in \operatorname{Spec}' := \operatorname{Spec}(T_\Gamma, g_\Gamma) \setminus \{k^2\lambda_1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \setminus \underbrace{\{4\pi^2\|b\|^2\}}_{\substack{\text{zweimal}\\ \hat{=}\, \pm b}}$

<u>Behauptung:</u> In Spec' gibt es nur einen Eigenwert λ mit:
$$\|b\|^2 \leq \frac{\lambda}{4\pi^2} \leq \|a\|^2 + \|b\|^2$$
Dann muss $\|b-a\| = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}$ sein, d.h. $\|b-a\|$ und damit b ist aus dem Spektrum bestimmt

<u>Beweis:</u> <u>ges.</u> $x \in \Gamma^*$ mit $x \neq ka$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \neq \pm b$ mit
$$\|b\|^2 \leq \|x\|^2 \leq \|a\|^2 + \|b\|^2 \qquad (*)$$

zz: $\|x\|$ ist dadurch eindeutig bestimmt, man zeigt: $\|x\| = \|b-a\|$

$x = \alpha a + \beta b$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow \|x\|^2 = \alpha^2\|a\|^2 + \beta^2\|b\|^2 + 2\alpha\beta\langle a,b\rangle$

$P(\alpha) := \alpha^2\|a\|^2 + 2\alpha\beta\langle a,b\rangle + \beta^2\|b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2$, β fest

quadratisches Polynom

- $P(\alpha) \leq 0$ da: $\|x\|^2 \leq \|a\|^2 + \|b\|^2$ nach $(*)$
für das gesuchte x

$P(\alpha) = \|x\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2$

- Diskriminante:

$$\Delta'(\beta) = \beta^2 \langle a,b\rangle^2 - \|a\|^2 \left(\beta^2 \|b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2 \right)$$

$\rightarrow \Delta'(\beta) \le \frac{1}{4} \|a\|^2 \|b\|^2 (8 - 3\beta^2)$

$\Delta'(\beta) < 0$ damit ex. keine reell. Nullstellen und $P(\alpha) < 0$ für kein α!

da $4\beta^2 \langle a,b\rangle^2 - 4\beta^2 \|a\|^2\|b\|^2 + 4\|a\|^2 (\|a\|^2 + \|b\|^2)$

$\le 8\|a\|^2\|b\|^2 - 3\beta^2 \|a\|^2 \|b\|^2$

$\Leftrightarrow 4\beta^2 \langle a,b\rangle^2 + 4\|a\|^2 (\|a\|^2 + \|b\|^2) \le 8\|a\|^2\|b\|^2 + \beta^2 \|a\|^2\|b\|^2$

- $4 \langle a,b\rangle^2 \le \|a\|^2 \cdot \|b\|^2$ da $4\langle a,b\rangle^2 \le \|a\|^4 \le \|a\|^2\|b\|^2$
- $\|a\|^2 + \|b\|^2 \le 2\|b\|^2$ da $\|a\|^2 \le \|b\|^2$

$\Rightarrow \Delta'(\beta) < 0$ falls $\beta^2 > \frac{8}{3}$

$\rightarrow \exists x$ nur für $\beta = 0$ oder $\beta = \pm 1$ $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$!

$\rightarrow$ oBdA: $\beta = 1$ sonst: $x \Leftrightarrow -x$

$\rightarrow P(\alpha) = \alpha^2 \|a\|^2 + 2\alpha \langle a,b\rangle - \|a\|^2$

ges. α mit $P(\alpha) \le 0$ $\alpha \in \mathbb{Z}$ und: $x = \alpha a + b \in M$ mit $(*)$

- $\alpha > 1$: $P(\alpha) > 0$ da $\langle a,b\rangle \ge 0$

  $P(\alpha) > \|a\|^2 + 2\langle a,b\rangle - \|a\|^2 \ge 2\langle a,b\rangle \ge 0$

- $\alpha = 1$: $P(\alpha) \le 0$ nur für $\langle a,b\rangle = 0 \rightarrow x = a+b$

  $\|x\| = \|a+b\| = \|a-b\|$

- $\alpha = 0$: $x = b$ ausgeschlossen
- $\alpha = -1$: $x = b - a$ und $\|x\|^2 = \|b-a\|^2$
- $\alpha < -1$

$\rightarrow P(\alpha) = (\alpha^2 - 1)\|a\|^2 + 2\alpha \langle a,b\rangle$ da $\langle a,b\rangle \le \frac{1}{2}\|a\|^2$

$\ge 2(\alpha^2 + \alpha - 1) \langle a,b\rangle$ da $\alpha^2 + \alpha - 1 = \underbrace{\alpha}_{<0}(\underbrace{\alpha+1}_{<0}) - 1$, $\alpha \in \mathbb{Z}$

> 0 für $\alpha < -1$

dh $\|x\|$ ist eindeutig bestimmt und gleich $\|b-a\|^2$

Das Gegenbeispiel von Milnor

Ziel: Konstruktion von zwei isospektralen aber nicht isometrischen flachen Tori in Dimension ≥ 16.

Bemerkung: Zwei flache Tori $\mathbb{R}^n/\Gamma_1$ und $\mathbb{R}^n/\Gamma_2$ sind genau dann isospektral, wenn jede Kugel um $0 \in \mathbb{R}^n$ genauso viele Elemente aus Γ_1^* wie aus Γ_2^* enthält.

Satz: Seien (T^n_Γ, g_Γ), $(T^n_{\Gamma'}, g_{\Gamma'})$ zwei n-dimensionale nicht isometrische Tori. Dann existiert für jedes $k \geq 1$ ein k-dimensionaler Torus $(T^n_{\Gamma''}, g_{\Gamma''})$, so dass $(T_\Gamma \times T_{\Gamma''}, g_\Gamma + g_{\Gamma''})$ und $(T_{\Gamma'} \times T_{\Gamma''}, g_{\Gamma'} + g_{\Gamma''})$ nicht-isometrisch sind.

d.h. ex. Gegenbsp. in Dimension n dann in allen Dimensionen $\geq n$

Beweis: es genügt die Behauptg für $k=1$ zu zeigen (weiter mit Induktion)

$a \in \mathbb{R}$ mit $|a| < |\gamma|$ für alle $\gamma \in \Gamma \cup \Gamma'$

$\Gamma_1 := \Gamma \oplus \mathbb{Z} a e_{n+1}$, $\Gamma_2 := \Gamma' \oplus \mathbb{Z} a e_{n+1}$ Gitter in $\mathbb{R}^{n+1}$

Beh: Γ_1, Γ_2 sind nicht isometrisch

da: $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ Isometrie, $F(\Gamma_1) = \Gamma_2$

$\to F(ae_{n+1}) = ae_{n+1}$, $F: e_{n+1}^\perp \to e_{n+1}^\perp$ Isometrie mit $F(\Gamma_1) = \Gamma_2$ $\lightning$

Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$, $n \equiv 0 \, (8)$, definiert man ein Gitter vom Rang n: $\Gamma(n)$. Es soll dann gezeigt werden, dass die Tori zu $\Gamma(8) \oplus \Gamma(8)$ und $\Gamma(16)$ isospektral, aber nicht isometrisch sind.

$\Gamma_1 := \mathbb{Z}^n$

$\Gamma_2 := \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma_1 \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \equiv 0 \, (2) \}$

$\longrightarrow \Gamma_2 \subset \Gamma_1$ Untergitter von Γ_1 vom Index 2

Sei $w_n := (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^n$

ab jetzt: $n \equiv 0 \; (8)$!

Man definiert: $\Gamma(n) := \mathrm{span}_{\mathbb{Z}} \{ \Gamma_2, w_n \}$

$$= \{ x + k w_n \mid x \in \Gamma_2, \; k \in \mathbb{Z}^n \}$$

$\Rightarrow$ • $\Gamma(n) \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Gitter

• $\Gamma_2 \subset \Gamma(n)$ Untergitter vom Index 2

da: $\Gamma(n) = \{ x + 2l w_n \mid \underset{x \in \Gamma_2}{l \in \mathbb{Z}} \} \cup \{ x + (2l+1) w_n \mid \underset{x \in \Gamma_2}{l \in \mathbb{Z}} \}$

Definition: Das Volumen $\mathrm{vol}(\Gamma)$ eines Gitters Γ definiert man als das Volumen $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)$ des durch Γ definierten flachen Torus

$M = (\langle v_i, v_j \rangle)$
Gramsche Matrix
$\det M$ = Volumen des von v_i aufgesp. Parallelotop

! Fakt: $\mathrm{vol}(\Gamma) = \left(\det(\langle v_i, v_j \rangle) \right)^{1/2}$!

wobei $v_1, \dots, v_n$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von Γ ist

Lemma: (i) $\mathrm{vol}(\Gamma_2) = 2\, \mathrm{vol}(\Gamma(n)) = 2\, \mathrm{vol}(\mathbb{Z}^n) =$

(ii) $\mathrm{vol}(\Gamma(n)) = 2\, \mathrm{vol}(\mathbb{Z}^n) = 1$

Beweis: $\Gamma_2 \subset \Gamma(n)$ Untergitter vom Index 2
$\Gamma_2 \subset \mathbb{Z}^n$

$\rightarrow$ $\mathbb{R}^n/\Gamma_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma(n)$
$\mathbb{R}^n/\Gamma_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$
sind 2-blättrige Überlagerungen

Das Volumen ist multiplikativ in endlichen Überlagerungen

$\Rightarrow$ $\mathrm{vol}(\Gamma_2) = \mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma_2) = 2\, \mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma(n)) = 2\, \mathrm{vol}(\Gamma(n))$

$\mathrm{vol}(\Gamma_2) = 2\, \mathrm{vol}(\mathbb{Z}^n)$